カオスと統計力学((6)数学的及び数理科学的考察,京大基研短期研究会「量子カオス : 理論と実験の現状」,研究会報告)

AUTHOR(S):

藤坂, 博一

CITATION:

藤坂, 博一. カオスと統計力学((6)数学的及び数理科学的考察,京大基研短期研究会「量子カオス : 理論と実験の現状」,研究会報告). 物性研究 2003, 80(1): 200-203

ISSUE DATE:

2003-04-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/97507

カオスと統計力学

藤坂 博一 (京都大学 情報学研究科)

講演では、拡散過程における大偏差統計と発達した乱流における粗視化エネルギー散逸率ゆらぎの Langevin ダイナミクスについて報告した。講演の概要は以下の通りである。

I. カオスと大偏差統計力学

定常で異常性を示さないランダム変数の多数個にわたる平均値の確率密度の極大値近傍 (小偏差領域) はガウス分布でよく近似できることがよく知られており、これは中心極限定理とよばれている。極大値近傍から大きくずれた領域（大偏差領域）ではランダム変数がガウス過程からずれていると必ずガウス分布からずれるので、一般に大偏差領域では中心極限定理は成立しない。小偏差領域を含め大偏差領域で成立する極限定理は大偏差原理あるいは大偏差統計とよばれている。熱平衡系から大きく離れた非平衡系ではゆらぎは平衡値から大きくずれており、ガウス性からの強いずれが観測される。非平衡系の統計を明らかにするには、大偏差統計が有用である [1-7]。以下では拡散問題における大偏差特性について述べる [8]。

$u(t)$ を時刻 t での (広義の) ブラウン粒子の速度とする。変位 $x(t)$ は、$\dot{x}(t) = u(t)$ に従って変化する。定常なランダムな速度 $u(t)$ は一般にガウス過程からずれている。十分大きな時間差に対する変位 $\Delta x(t) = x(t) - x(0) = \int_0^t u(s)ds$ の確率密度の漸近形は大偏差統計により、

$$P_t(\Delta x) \sim \exp\left[-S\left(\frac{\Delta x}{t}\right)t\right] \tag{1}$$

で与えられる。ゆらぎスペクトル $S(u)$ は $S(u) \geq 0,\ S''(u) > 0$ を満たし、$u_0 \equiv \langle u\rangle (u(t)$ の長時間平均) とおくと、$S(u_0) = S'(u_0) = 0$ を満たす。$S(u)$ は u_0 近傍で放物形をもつが、u_0 から大きくずれた大偏差領域では一般に放物形から大きくずれてくる。ただし、$u(t)$ がガウス過程であればすべての u の領域で放物形をもつ。構造関数の漸近形

$$Z_q(t) \equiv \langle e^{q\Delta x(t)}\rangle \sim e^{\phi(q)t} \tag{2}$$

で定義される特性関数 $\phi(q)$ は $S(u)$ と、$\phi(q) = -\min_u[S(u) - qu]$ の関係にあり、

$$S'(u(q)) = q,\ u(q) = \phi'(q),\ S(u(q)) = qu(q) - \phi(q), \phi''(q) = u'(q) = \frac{1}{S''(u(q))} > 0 \tag{3}$$

が成立する。

分散 $\sigma_0^2(t) \equiv \langle (x(t) - x(0) - u(0)t)^2\rangle$ は $t \to \infty$ で、$\sigma_0^2(t) = 2Dt$ となる。D は拡散係数であり、

$$D = \int_0^\infty C_0(t)dt\ , \qquad C_0(t) = \langle (u(t) - u_0)(u(0) - u_0)\rangle \tag{4}$$

で与えられる。$S(u)$ を極小値の周りに放物線近似を使い、$S_G(u) = \frac{1}{4D}(u - u_0)^2$ とおくと、2次モーメントを正しく与える範囲で確率密度は、

$$\frac{\partial P_t(x - x_0)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(-u_0 + D\frac{\partial}{\partial x}\right)P_t(x - x_0)\right] \tag{5}$$

を満たす。この式は漸近形として

$$P_t(\Delta x) \sim \exp\left[-S_G\left(\frac{\Delta x}{t}\right)t\right] \tag{6}$$

をもち、$u(t)$ がガウス分布でなければ平均２乗変位までは正しく与えるが高次の平均は正しく与えない。

高次の統計量の漸近ふるまいを解析するには $S(u)$ の大偏差領域までとりこんだ統計解析を行う必要がある。このために、一般化された (q 次) 分散

$$\sigma_q^2(t) \equiv \langle (x(t)-x(0)-u(q)t)^2; q\rangle_t \equiv \langle (x(t)-x(0)-u(q)t)^2 e^{q(x_t-x_0)}\rangle / Z_q(t) \tag{7}$$

を定義しよう [8]。この式は、$q=0$ とおくと通常の分散の式に一致する。$t\to\infty$ では、

$$\sigma_q^2(t) = 2D_q t\ , \tag{8}$$

$$D_q = \frac{1}{2}\phi''(q) = \frac{1}{2S''(u(q))} = \int_0^\infty C_q(t)dt \tag{9}$$

が成立する。$C_q(t)$ は、$C_q(t) = \lim_{T\to\infty}\langle (u(t)-u(q))(u(0)-u(q)); q\rangle_T$ で定義された一般化相関関数である。$q=0$ では式 (8) は通常の分散の漸近形 $\sigma_0^2(t) = 2Dt$ に一致するので、$D_0 = D$ である。また、特に、$u(t)$ がガウス過程であれば D_q の q 依存性はなく D に一致する。しかし、一般に $u(t)$ はガウス過程ではなく D_q の q 依存性が存在し、その q 依存性は分布 $P_t(\Delta x)$ の非ガウス性を反映することになる。式 (8) は通常の分散の漸近形を拡張した式であり、D_q は一般化された拡散係数とでもよぶことができるだろう。D_q は $u(t)$ の非ガウス性に起因する "分散のゆらぎ" を測る量であると考えることができ、言わば "拡散係数のゆらぎ" を特徴付ける量であると解釈することができる [8]。

定常時系列 $\{u(t)\}$ の大偏差統計は、特性量 $\phi(q)$ や $S(u)$ によって記述される。時系列がカオスによって発生されるときは、$\phi(q)$ は時間発展の演算子 H(写像系のときは Perron-Frobenius 演算子、確率過程によって時間発展するときは、マスター演算子 (Fokker-Planck 演算子)) から決められる一般化時間発展演算子 $H_q(H_0 = H)$ の最大固有値によって決定される。

大偏差統計は広い意味のゆらぎの統計的独立性を基礎にして粗視化変数 (時系列の場合は、有限時間での時間的平均値) の確率密度の漸近形を与えるものである。このような扱いでは平均値のゆらぎに注目しており、時系列がもつ陽な時間相関をとり込んでいない。フーリエ強度を使って解析される通常の時間相関の解析では上に述べた大偏差統計が反映されていない。時間相関の問題と相関の問題を結びつけることが可能である。これについては文献 [3]、[5]、[6] を参照してほしい。

また、$u(t)$ がカオス変動の場合はさまざまな統計量はカオス力学系の不安定周期軌道によって決定されている。大偏差統計量の周期軌道による決定については文献 [9] を参照してほしい。

II. 乱流間欠性のダイナミクス

発達した一様等方性性乱流における速度場の間欠性は、1962 年の Kolmogorov, Obukhov の対数正規理論以来２点間速度差の統計と関連して多くの研究がなされている。Kolmogorov 等の理論では間欠性はエネルギー散逸率のゆらぎと結びついており、エネルギー散逸率ゆらぎは速度構造関数を決めているが、速度構造関数の統計を別にしても、エネルギー散逸率ゆらぎの統計は Navier-Stokes 方程式のダイナミクスを直接反映するものであり、それ自身基本的な力学量である。

局所的なエネルギー散逸率 $\epsilon_{\rm loc}$ から得られる粗視化エネルギー散逸率

$$\epsilon_r(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi r^3/3}\int_{|\boldsymbol{r}|<r} \epsilon_{\rm loc}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \tag{10}$$

は、慣性領域 $\eta \ll r \ll L$(L はエネルギー注入スケール、η はミクロな Kolmogorov スケール）において漸近的に、

$$P_r^0(\epsilon) \sim \epsilon^{-1}\left(\frac{L}{r}\right)^{-S(z_r(\epsilon))} = \left(\frac{L}{r}\right)^{-S(z_r(\epsilon))-z_r(\epsilon)}, \quad z_r(\epsilon) \equiv \frac{\ln\frac{\epsilon}{\epsilon_L}}{\ln\frac{L}{r}} \tag{11}$$

で与えられる [10-12]。ϵ_L はスケール L での粗視化エネルギー散逸率であり、定数と仮定した。$S(z)$ は、$S(z) \geq 0, S''(z) > 0$ を満たすある特性関数 (ゆらぎスペクトル) であり、一点 z_0 に極小値 $S(z_0) = 0$ をもつ。これは、慣性領域において成立する自己相似性より、$\epsilon_r = \epsilon_L \left(\frac{L}{r}\right)^{\bar{z}_r}$ で定義される指数ゆらぎ $\bar{z}_r(\boldsymbol{x})$ の漸近分布が $(L/r)^{-S(z)}$ に比例することの結果である。中心極限定理より $S(z)$ は極小値近傍で放物形をもつ。したがって、$\bar{z}_r(\boldsymbol{x})$ のゆらぎはガウス分布に近い "おとなしい" 関数であることがわかる。特性関数 $S(z)$ は乱流のマルチフラクタル理論に現われる $f(\alpha)$ スペクトルと結びついており、$f(\alpha)$ とは異なり直接観測することが可能であり、実際にジェット乱流で報告されている [11,12]。

上の議論は、粗視化エネルギー散逸率ゆらぎの静的な特性に関するものである。特に、$P_r^0(\epsilon)$ ある一点での確率密度である。速度場は Navier-Stokes 方程式に従って時々刻々と変化するので、粗視化エネルギー散逸率は時間の関数である。時刻 t で、点 $\boldsymbol{x}$ を中心として半径 r の領域で粗視化されたエネルギー散逸率を $\epsilon_r(\boldsymbol{x}, t)$ と書き、以下では、$\epsilon_r(\boldsymbol{x}, t)$ が従う Langevin ダイナミクスを構成することを考える [13]。このためにまず、粗視化エネルギー散逸率場の定常確率密度を構成することにして考える。現象論的に求めたいのであるが、そのための指針は、指数場 $\bar{z}_r(\boldsymbol{x})$ は "おとなしい" ランダム量であることである。まず、指数場の定常確率密度を考える。実空間の近傍にある指数ゆらぎは相関があることを考慮する必要がある。乱流は一様等方的であるので、近傍にある指数が異なる値をとると、指数場のゆらぎが独立とした場合より、実現される確率は下がるだろう。これを式で表わすと指数場の定常確率は、

$$Q_r\{z\} \propto \left(\frac{L}{r}\right)^{-\mathcal{H}\{z\}}, \mathcal{H}\{z\} = \int \left[S(z(\boldsymbol{x})) + \frac{c_r}{2}(\nabla_{\boldsymbol{x}} z(\boldsymbol{x}))^2\right] d\boldsymbol{x}. \tag{12}$$

と書けると期待される。c_r はある正の定数である。$(\nabla_{\boldsymbol{x}} z(\boldsymbol{x}))^2$ の項は、指数場の非均質性が存在すると確率が減少する効果を表す。これより粗視化エネルギー散逸場の定常確率密度は、

$$P_r^0\{\epsilon\} \sim \left(\frac{L}{r}\right)^{-\mathcal{F}\left\{\ln\frac{\epsilon}{\epsilon_L}/\ln\frac{L}{r}\right\}}, \quad \mathcal{F}\{z\} = \mathcal{H}\{z\} + \int z(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{13}$$

と得られる。

定常確率密度が得られたので、$\epsilon_r(\boldsymbol{x}, t)$ の時間変化を決める式を導くことを考えよう。時間発展は Navier-Stokes 方程式に従う。Navier-Stokes 方程式は、乱流のすべての情報を含むが、今問題にしている間欠性の問題には粗視化エネルギー散逸場の情報だけで十分である（と考えている）ので、Navier-Stokes 方程式から出発して粗視化エネルギー散逸場のダイナミクスを導くことができればよい。これには、熱平衡系近傍の非平衡統計力学で発達した射影演算子法を用いることができる。指数場ゆらぎによるダイナミクスを純緩和型にとり、Markov 近似と Fokker-Planck 近似を用いると粗視化エネルギー散逸場の Langevin 方程式と Fokker-Planck 方程式は、

$$\dot{\epsilon}_r(\boldsymbol{x}, t) = \left(\ln\frac{L}{r}\right)\epsilon_r\left[-\left(\Gamma_r \ln\frac{L}{r}\right)\frac{\delta\mathcal{H}\{\bar{z}_r\}}{\delta\bar{z}_r}\Big|_{\bar{z}_r=\ln\frac{\epsilon_r}{\epsilon_L}/\ln\frac{L}{r}} + R_r(\boldsymbol{x}, t)\right], \tag{14}$$

$$\frac{\partial P_r\{\epsilon, t\}}{\partial t} = \left(\ln\frac{L}{r}\right)^2 \int \frac{\delta}{\delta\epsilon(\boldsymbol{x})}\left[\Gamma_r(\epsilon(\boldsymbol{x}))^2 P_r^0\{\epsilon\}\frac{\delta}{\delta\epsilon(\boldsymbol{x})}\left\{\frac{P_r\{\epsilon, t\}}{P_r^0\{\epsilon\}}\right\}\right] d\boldsymbol{x} \tag{15}$$

と書ける。$R_r(\boldsymbol{x},t)$ は Langevin ランダム力であり、強度 Γ_r をもつ白色ガウシアンを仮定した。

粗視化エネルギー散逸率場の Langevin 方程式には、ランダム力は相乗的に入っていることに注意してほしい。このために、小さなスケール ($L/r \to \infty$) では ϵ_r の時間変化は間欠的な特徴が強くなっていき、実験的に観測されている間欠性の特徴をよく説明することができる [13]。このように、特性関数 $S(z)$ には具体的な形は仮定していない。$S(z)$ に対数正規理論の放物形を用いたり、She-Leveque 近似を用いることによりいろいろな利用が可能であると考えられる。

講演に直接関係する文献：

物理学の観点からの大偏差統計理論:

[1] H. Fujisaka and M. Inoue, Statistical-Thermodynamics Formalism of Self-Similarity, *Prog. Theor. Phys.* **77** (1987) 1334.

[2] H. Fujisaka and M. Inoue, Statistical-Physical Theory of Multivariate Temporal Fluctuations, *Phys. Rev. A* **41** (1990) 5302.

[3] H. Fujisaka and H. Shibata, New Asymptotic Law Governing Overall Temporal Correlations in Chaotic Systems, *Prog. Theor. Phys.* **85** (1991) 187.

[4] H. Fujisaka, A Contribution to Statistical Nonlinear Dynamics, in *From Phase Transitions to Chaos*, ed. G. Gyorgyi et al., (World-Scientific, 1992) p.434.

[5] 藤坂，非平衡系の統計力学，(産業図書, 1998) 第 4 章.

[6] 藤坂，粗視化と "大偏差統計力学 "，日本物理学会誌, 第 54 巻 6 月号 (1999) p.423.

[7] 藤坂，自然現象と大偏差統計-統計的に独立なゆらぎから強相関ゆらぎへ-, 数理科学，No. 462, 12 月号 (2001) p.47.

"拡散係数のゆらぎ"

[8] H. Fujisaka and M. Inoue, Characterization of Various Statistics of Diffusive Motion, *J. of Phys. Soc. Jpn* **70** (2001) 2283.

大偏差統計量の周期軌道展開

[9] H. Fujisaka, H. Shigematsu and B. Eckhardt, Continued-Fraction Expansion of Eigenvalues of Generalized Evolution Operator in terms of Peridic Cycles, *Z. Physik B* **92** (1993) 235.

乱流場のスケーリング:

[10] T. Watanabe and H. Fujisaka, Asymptotic Behavior of the q-th Order Intermittency Exponent in Fully Developed Turbulence, *J. of Phys. Soc. Jpn* **69**, (2000) 1672.

[11] H. Fujisaka, Y. Nakayama, T. Watanabe and S. Grossmann, Scaling Hypothesis Leading to Generalized Extended Self-Similarity of Turbulence, *Phys. Rev. E* **65**, (2002) 046307.

[12] 藤坂，乱流場のスケーリングと構造，パリティ，第 17 巻 10 月号 (2002) p.13.

粗視化エネルギー散逸率ゆらぎのダイナミクス

[13] H. Fujisaka and Y. Nakayama, Intermittency and Exponent Field Dynamics in Developed Turbulence, to be published in *Phys. Rev. E.*